

INSTITUT D'ESTUDIS CATALANS

..... SECCIÓ DE CIÈNCIES

/ COL·LECCIÓ DE CURSOS DE FÍSICA I MATEMÀTICA

Dirigida per E. TERRADAS

SOBRE FUNCIONS DE DUES VARIABLES COMPLEXES

CONFERÈNCIES DONADES EL MAIG DEL 1933

PER

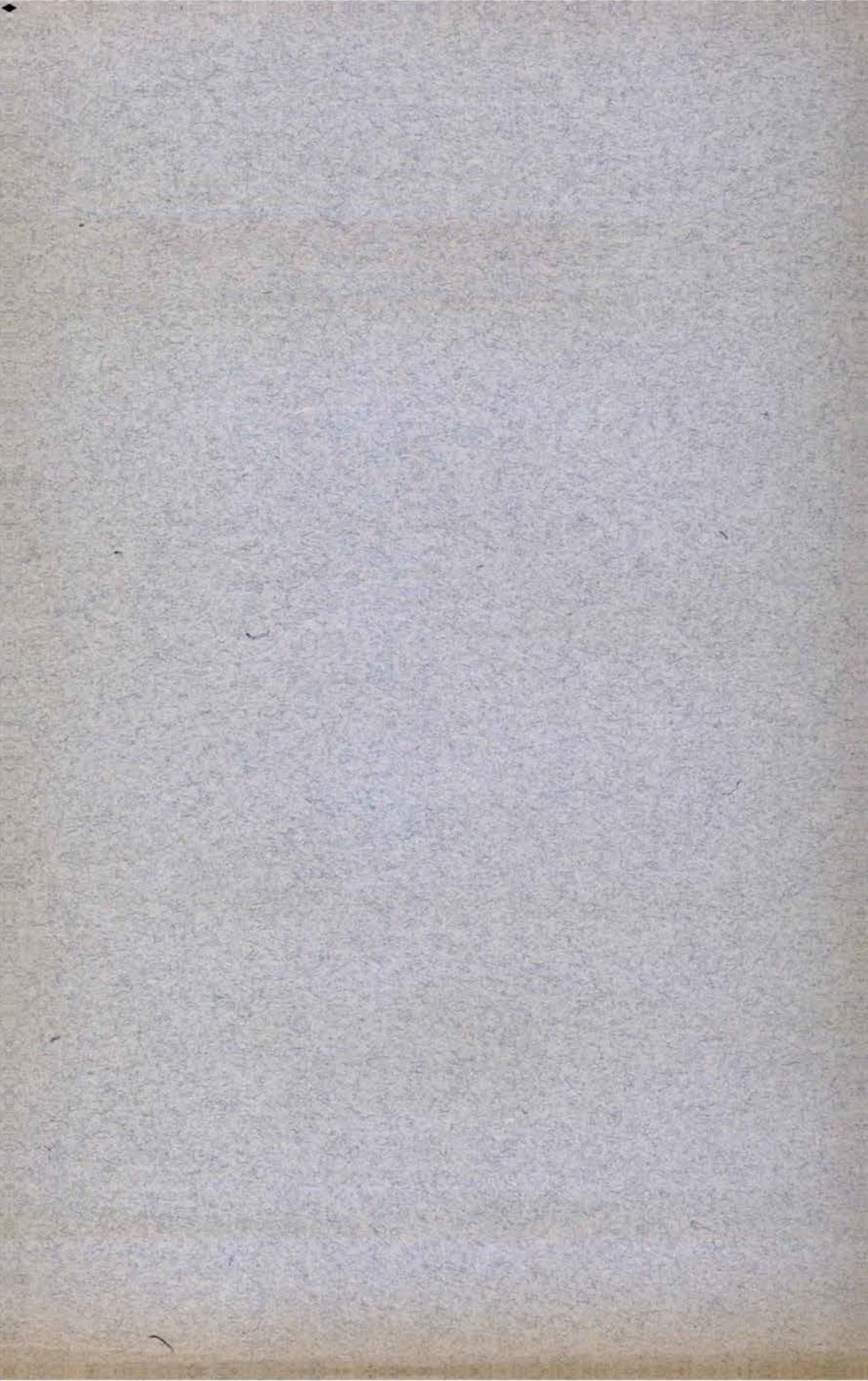
F. SEVERI

Professor de la Universitat de Roma



BARCELONA

MCMXXXIV



SOBRE FUNCIONS DE DUES
VARIABLES COMPLEXES

PUBLICACIONS DE L'INSTITUT D'ESTUDIS CATALANS
· · · · · SECCIÓ DE CIÈNCIES · · · · ·
COL·LECCIÓ DE CURSOS DE FÍSICA I MATEMÀTICA
Dirigida per E. TERRADAS

SOBRE FUNCIONS DE DUES VARIABLES COMPLEXES

CONFERÈNCIES DONADES EL MAIG DEL 1933

PER

F. SEVERI

Professor de la Universitat de Roma

INSTITUT D'ESTUDIS CATALANS
PALAU DE LA GENERALITAT
BARCELONA

This One



2YCC-QS6-1QEE

IMPREMTA DE LA CASA DE CARITAT : MONTALEGRE, 5 : BARCELONA

SUMARI

CONFERÈNCIA I

SOBRE SÈRIES DE POTÈNCIES DE DUES VARIABLES

Introducció.

1. Noció de radis associats de convergència.
2. Teorema de Fabry-Faber-Hartogs.
3. Representació geomètrica.
4. Camp total de convergència d'una sèrie doble.

CONFERÈNCIA II

DIFERENTS PUNTS DE MIRA EN L'EXAMEN DE LES FUNCIONS ANALÍTQUES DE DUES VARIABLES COMPLEXES. SINGULARITATS LLURS.

1. Mètode d'anàlisi de Cauchy.
2. Condició de monogeneïtat i integral en contorn tancat.
3. Punts singulars.
4. Transformacions pseudo-conformes.
5. Problema de Dirichlet.

CONFERÊNCIA I

SOBRE SÈRIES DE POTÈNCIES DE DUES VARIABLES

Agraeixo vivament a la Facultat de Ciències de la Universitat de Barcelona i a l'Institut d'Estudis Catalans, la invitació cordial que m'han adreçat per donar, una altra vegada, alguna conferència a la Universitat de Barcelona, on tants col·legues egregis m'honoren amb llur amistat. Particulars regraciaments al benvolgut Prof. A. Torroja i al Prof. E. Terradas, esperit ample i eclèctic que domina la Matemàtica amb la mateixa agilitat amb què tracta els problemes tècnics d'Enginyeria i que ha volgut, gentilment, assumir la tasca de recollir aquestes meves conferències.

INTRODUCCIÓ

Algunes de les particulars contribucions meves a la teoria foren objecte d'estudi i investigació en el temps de la meva permanència a Barcelona, amb ocasió del curs donat la primavera del 1929. Circumstància semblant contribueix a fer créixer els vincles d'interès i d'afecte que em lliguen als estudiosos d'aquesta terra, que conserva amb la d'Itàlia una singular semblança topogràfica i popular.

En aquesta primera conferència m'ocuparé de les sèries de potències com a element primordial i bàsic de

l'estudi de les funcions analítiques de dues variables complexes.

En la teoria general apareixen algunes propietats com a generalització de les ja conegudes en el cas d'una variable independent, però sovintegen fets nous i propietats insospitades que obliguen a la convicció de necessitar un estudi directe, una anàlisi nova. Anàlisi les conseqüències i resultats de la qual són sumament importants, no solament per llur valor teòric, sinó també per llur contribució al desenvolupament de la geometria algebàrica, a la resolució de problemes de la mecànica ondulatoria i a l'estudi de les funcionals analítiques.

I. NOCIÓ DE RADIS ASSOCIATS DE CONVERGÈNCIA

Siguin les variables (x, y) , on $x = x_1 + ix_2$, $y = y_1 + iy_2$; els valors de x_1, x_2, y_1, y_2 són reals. Consideri's la sèrie doble

$$f(x, y) = \sum a_{mn} x^m y^n$$

en què a_{mn} és un nombre complex. Dos nombres reals r, s , no negatius, constitueixen una *parella de radis de convergència associats* quan per a

$|x| < r, |y| < s$ la sèrie és absolutament convergent,¹

i per a

$|x| > r, |y| > s$ la sèrie no és absolutament convergent.

1. Per a una teoria elemental de les sèries dobles es poden consultar les meves *Lezioni di Analisi* (Bolonya, Zanichelli, 1933).

Existeix entre ambdós nombres una relació: cadascun d'aquests dos nombres és funció unívoca, monòtona (no creixent) de l'altre. Del concepte de límit superior d'un conjunt de nombres reals es dedueix immediatament que

$$\lim_{m+n} \sqrt[m+n]{|a_{mn}| r^m s^n} = 1$$

(Lemaire, 1896). Anteriorment (1887) *Biermann* hagué d'introduir un radi de convergència restringit que correspon a $r = s$, la qual cosa apareix com una extensió del teorema de *Cauchy-Hadamard* per a les sèries de potències d'una variable.

2. TEOREMA DE FABRY-FABER-HARTOGS.

En els primers anys d'aquest segle (1902 a 1905) s'havia descobert que fent $\rho = \log. r$, $\sigma = \log. s$, la corba que relaciona ρ amb σ és tal, que l'àrea del triangle format per tres punts de la dita corba, descrit en el sentit $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$, no és positiva. I, recíprocament, aquesta condició és suficient perquè existeixi una sèrie doble de potències, de la qual r i s siguin radis associats de convergència.

3. REPRESENTACIÓ GEOMÈTRICA.

Convé utilitzar l'espai de quatre dimensions S_4 . Una relació lineal com $ax + by + c = 0$ defineix el que s'anomena un *pla característic*. Correspon, evidentment, a dues relacions lineals en x_1, x_2, y_1, y_2 que defineixen espais lineals de tres dimensions (hiperplans) que es ta-

llen segons aquell pla. Existeixen en S_4 ∞^4 plans característics, mentre la totalitat dels plans de S_4 és ∞^8 .

Tota relació *analítica* entre x, y representa una *superfície característica* (Levi-Civita, 1905). Tota superfície característica és *analítica*, és a dir, les coordenades de llurs punts són funcions analítiques reals de dos paràmetres. És clar que no tota superfície analítica de S_4 és característica. Per això la denominació de superfície característica és preferible a la de superfície analítica, que fins ara empraven els autors francesos i alemanys.

Els plans tangents a una superfície característica són característics, i aquesta propietat és peculiar d'aitals superfícies.

Si el camp en què una funció de variables complexes es troba definida s'estén indefinidament, per a precisar la fàisó de comportar-se la funció a l'infinit convé transformar l'espai, de la manera com, en el cas d'una variable, s'utilitza la transformació $z' = \frac{1}{z}$. Aquesta transformació és lineal (homogràfica); i és biunívoca sense excepció, si com a corresponent del valor zero es pren *el valor* ∞ . Això implica considerar com a idèntics, o sigui com *un sol* punt, tots els ∞^1 punts del pla mètrico-projectiu, en el qual es distendeix la variable complexa z . Un pla en el qual tots els punts de l'infinit s'imaginin com un sol és homeomorf a una superfície esfèrica (de la qual es pot obtenir per projecció estereogràfica). La superfície esfèrica és, doncs, la imatge real (la superfície de *Riemann*) de la recta projectiva complexa.

En el cas de dues variables, la transformació $x' = \frac{1}{x}$,

$y' = \frac{1}{y}$, que seria espontani de considerar per estudiar l'infinit, no és lineal, sinó quadràtica. Aquesta i altres

transformacions semblants donen lloc a inconvenients que moltes vegades he tingut ocasió d'assenyalar. Arribem a la conclusió que la manera més senzilla i natural d'estudiar el comportament d'una funció analítica de dues variables a l'infinit és col·locar-se en el punt de vista projectiu. Això equival a usar sempre transformacions homogràfiques sobre les x, y per a portar l'infinit al finit. Així no s'altera la naturalesa de les eventuais singularitats que la funció estudiada presenta a l'infinit.

La varietat que ve a generalitzar l'esfera és la de *C. Segre* (1892), de sisè ordre i quatre dimensions V_4^6 en l'espai real de vuit dimensions.¹ És la varietat algebraica d'ordre mínim sobre la qual pot realitzar-se la representació homeomorfa del pla projectiu complex (varietat riemanniana del pla projectiu complex) com a camp de variabilitat de x, y ; varietat que, en el seu tipus el·líptic, conté un sistema ∞^4 de plans imaginaris i llurs conjugats: per tot punt de la V_4^6 passa un pla de l'un i un pla de l'altre sistema, i cada parella dóna, per intersecció, un punt real de V_4^6 en correspondència, biunívoca sense excepcions i continua, amb els punts del pla projectiu complex: tota transformació homogràfica d'aquest en ell mateix es tradueix en una transformació de V_4^6 en ella mateixa, subordinada a una homografia de S_8 .

La V_4^6 pot elegir-se finita transformant homogràficament S_8 , de fàcisó que l'hiperplà a l'infinit no la talli. En la correspondència entre els punts del pla π projectiu complex en x, y i els punts de l'espai real euclidià S_4 de coordenades x_1, x_2, y_1, y_2 , es nota que, mentre en π hi ha ∞^2 punts a l'infinit, l'espai Σ impropri de S_4 en té ∞^3 . La dificultat es resol considerant en Σ la congruència K

1. Es pot consultar sobre aquesta qüestió un treball de *B. Segre* a la *Revista matemàtica hispano-americana* (1928).

de rectes reals que tallen a dues rectes fixes de Σ , imaginàries conjugades i que no es tallen, que tenen per equacions a l'infinit $x_1 + ix_2 = 0$, $x_1 - ix_2 = 0$; $y_1 + iy_2 = 0$, $y_1 - iy_2 = 0$, i que són dues generatrius del mateix sistema de la quàdrica $x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2 = 0$, que és l'*absolut* de S_4 . A cada pla característic correspon com a recta de l'infinit una recta de K . Les directrius de la congruència K assenyalen en cada pla característic llurs punts cíclics. De la circumstància de trobar-se en dues rectes guerxes es dedueix que no es pot invertir l'orientació dels plans característics amb un moviment continu de S_4 , conservant-se plans característics. Degut a ésser característics els plans tangents a una superfície característica, tampoc no poden intercanviar-se les cares d'aquesta superfície per variació contínua, conservant el caràcter de superfície característica.

4. CAMP TOTAL DE CONVERGÈNCIA D'UNA SÈRIE DOBLE.

En les sèries de potències d'una variable el camp de convergència és circular. Es presenta òbviament la qüestió de com serà el camp de convergència de les sèries dobles. I, encara, com a preliminar, cal establir què anomenarem convergència en un camp. Punt (x, y) de convergència serà un sistema de valors, ambdós no nuls, de x, y tals que la sèrie doble sigui *absolutament* convergent; és a dir, un punt interior a un dels infinits bicilindres (*Carathéodory*) definits per una parella qualsevol de radis associats. El camp total serà el conjunt dels punts de convergència i llurs punts d'acumulació.

La condició de convergència absoluta, equivalent a ésser acotat el conjunt dels termes de la sèrie doble en els punts interiors al camp, entranya la covariància de

la sèrie i el camp per transformacions lineals i enteres de les variables x, y (*Behnke, Severi*), cosa que no passaria amb una convergència no absoluta. Això estableix una primera diferència essencial respecte a les sèries de potències d'una variable, per a les quals el camp total de convergència (cercle de convergència) pot definir-se com el conjunt de punts on la sèrie és convergent (no cal que ho sigui absolutament) i de llurs punts d'acumulació, i resulta així covariant de la sèrie respecte a les transformacions lineals enteres de la variable.

Tot bicilindre de S_4 és una quadricel·la, és a dir, els seus elements poden correspondre homeomòrficament a una hiperesfera de S_4 . El contorn d'un bicilindre consta dels punts imatges de les parelles que s'obtenen associant els punts de cadascuna de les circumferències de radi r, s , amb els de l'altre cercle. El contorn format per ambdues varietats ∞^3 és una varietat tancada, simple, de tres dimensions, homeomorfa al contorn d'una hiperesfera. La connexió d'ambdós trossos es fa per mitjà de la superfície $x_1^2 + x_2^2 = r^2, y_1^2 + y_2^2 = s^2$, situada en l'esmentat contorn; és una superfície homeomorfa a un tor circular, i s'anomena tor circular de S_4 de centre en l'origen i radis r i s . Per cada punt de S_4 passa un tor circular que es redueix a una circumferència si $x = 0$ ó $y = 0$, i a l'origen si $x = y = 0$.

El camp de convergència ho és de generació en el sentit de *Weierstrass*, i pot donar lloc a la perllongació analítica i definició de la funció i el seu camp d'existència E . En tot punt interior P del camp de convergència Γ la funció és monògena en el sentit de *Cauchy* i desenrotllable en sèrie en un bicilindre de centre P , contingut en Γ i definit per una parella de radis associats; aquest bicilindre pot eixir del camp Γ i estendre Γ dins E . Quan la perllongació és impossible, s'ateny un punt

singular. En el contorn de tot bicilindre de convergència hi ha algun punt singular. El més proper a l'origen defineix la hiperesfera de convergència de radi comprès entre R i $R\sqrt{2}$, essent R el radi restringit de *Biermann*.

La sèrie és derivable en Γ : també ho són totes les seves derivades, però en aquestes el camp és igual o més gran que Γ . Això constitueix una altra diferència notable respecte a les sèries de potències d'una variable.

Definit així Γ i establertes les seves propietats més elementals, es presenta la qüestió de quina és la seva forma. Amb aquest fi, convé establir i recordar algunes definicions.

Cos o camp circular és tot camp de quatre dimensions en S_4 proveït d'un centre O tal, que tot pla característic que passa per O talla el cos segons cercles de centre O (*Carathéodory*, 1926). Si O és l'origen i el camp és convex i ve tallat pels plans característics $x = \text{const.}$ $y = \text{const.}$ en cercles amb centres situats en els plans $y = 0$, $x = 0$, s'anomena *cos o camp* de *Reinhardt* (1921).

La hiperesfera i el bicilindre són cossos circulars. Els camps circulars poden caracteritzar-se, d'una manera més general, per la propietat d'ésser invariants respecte al grup continu ∞^1 de transformacions

$$x' = x e^{i\theta} \quad y' = y e^{i\theta}$$

essent θ real. Les trajectòries són circumferències situades en els plans característics que passen per O . Els camps quadridimensionals circulars, invariants respecte al grup ∞^2 : $x' = x e^{i\theta}$, $y' = y e^{i\xi}$ (θ i ξ reals) són anomenats *esferoides* per *Severi*. Les trajectòries d'aquest grup són tors circulars de centre O .

El camp total de convergència Γ d'una sèrie doble

de potències de x, y (o de $x - x_0, y - y_0$) és un esferoide de centre O ($x = y = 0$) (o bé de centre x_0, y_0). Vegem-ne la demostració passant per alt els detalls. Siguin r, s dos radis associats i sigui $f(r, s) = 0$ la corba que els relaciona. Podem imaginar-la sobre el pla x_1, y_1 de S_4 , que representa els valors reals de x, y . Aquesta corba està situada en el quadrant positiu dels eixos i determina, amb els segments dels eixos que tenen O per origen, un triangle mixtilini T . Dic que l'esferoide E , lloc dels ∞^2 tors circulars que passen pels punts d'aquest triangle (esferoide que té per contorn el lloc dels ∞^1 tors circulars corresponents als punts de $f(r, s) = 0$) coincideix amb el camp total de convergència de la sèrie donada. En efecte; prenent un punt $P(x_1, y_1)$ de T no situat sobre la línia $f = 0$, la semirecta OP troba la línia en un punt r, s tal, que $x_1 < r, y_1 < s$, i, per consegüent, els punts x, y per als quals $|x| = x_1, |y| = y_1$, ço és, tots els punts del tor circular que passa per P són interns a Γ . Tot punt intern a E és, doncs, punt intern a Γ . Si, contràriament, es pren un punt extern a E es troba anàlogament que és extern a Γ . Per això Γ i E coincideixen.

El camp Γ no és, però, un esferoide de tipus general, perquè la seva corba directriu real $f = 0$ no és una línia qualsevol del quadrant positiu, sinó una línia que satisfà el teorema de *Fabry-Faber-Hartogs*. Escrita l'equació d'aquesta línia en la forma

$$(I) \quad y_1^2 = \varphi(t) \quad t = \left(\frac{x_1}{y_1}\right)^2$$

la condició resultant de l'esmentat teorema es pot posar en forma d'inequació diferencial.

$$(2) \quad t\varphi'^4 - t\varphi\varphi'' - \varphi\varphi' \geq 0$$

Recíprocament, considerada una corba del quadrant positiu que satisfaci el teorema de *Fabry-Faber-Hartogs* [o, el que és igual, la (2)], existeix una sèrie doble de potències els radis associats de convergència de la qual satisfan l'equació d'aquella línia: o sigui, una sèrie doble de potències, el camp total de convergència de la qual és l'esferoide que té per directriu real la mateixa línia.

Si l'equació del contorn Δ de Γ s'escriu

$$u \equiv y\bar{y} - F(\lambda, \bar{\lambda}) = 0 \quad \lambda = \frac{x}{y}$$

i es fa $F(\lambda, \bar{\lambda}) = \varphi(t)$, ($t = \lambda\bar{\lambda}$), la corba directriu ve donada per la (1), i es té la relació

$$(3) \quad \frac{t\varphi'^4 - t\varphi\varphi'' - \varphi\varphi'}{t} = \frac{1}{16} L(u)$$

on $L(u)$ és un notable invariant diferencial (d'E. E. Levi) del qual parlaré en la segona conferència.

Les dues regions en què Δ divideix la S_4 són tals, que en una d'elles u té el mateix signe que $L(u)$ i la propietat és invariant respecte a les transformacions pseudo-conformes, de les quals m'ocuparé també en l'altra conferència. La varietat tancada Γ es diu (amb *Behnke*) pseudo-convexa (cap a l'exterior) si en els punts de Δ és $L(u) > 0$, de manera que u té el mateix signe que $L(u)$ en els punts externs a Γ . El cos Γ es diu pseudo-convex si Δ és pseudo-convex. En particular, un cos convex és pseudo-convex.

Ara bé, en virtut de la (3), la (2) es redueix a la $L(u) \geq 0$, i es conclou que a fi que un camp quadridi-

*mensional sigui camp total de convergència d'una sèrie doble de potències, és necessari i suficient que sigui un esferoide pseudo-convex.*¹

En particular, un esferoide que té una directriu convexa és camp total. Si hom suposa $x_2 = 0$, ço és, si es tracta de les sèries de potències d'una variable real x_1 i una complexa y , el camp total de convergència en l'espai $S_3 (x_1, y_1, y_2)$ ve limitat per una superfície de revolució al voltant de l'eix x , i la línia meridiana satisfà les (2).

Qualsevol sòlid convex de rotació és camp total de convergència d'una sèrie doble d'una variable real i una complexa.

1. Publicaré, en una ocasió pròxima, els detalls de la demostració precedent, conforme al punt de mira des del qual jo prefereixo de considerar les funcions analítiques de dues variables.

CONFERÈNCIA II

DIFERENTS PUNTS DE MIRA EN L'EXAMEN DE LES FUNCIONS ANALÍTQUES DE DUES VARIA- BLES COMPLEXES. SINGULARITATS LLURS.

I. MÈTODE D'ANÀLISI DE CAUCHY.

Per a l'anàlisi de les funcions d'una sola variable complexa existeixen tres mètodes fonamentals, que porten els noms de tres grans matemàtics. El de *Cauchy* (completat en un punt essencial per *Goursat*), en el qual, sobre la base de l'existència de la funció uniforme i contínua, la sola propietat de posseir derivada en els punts d'un camp condueix a la propietat d'ésser nul·la la integral en un contorn tancat; d'on es dedueixen les altres propietats de la funció, per exemple, el seu desenrotllament en sèrie de *Taylor*, perllongació analítica, etc. El de *Weierstrass*, en el qual l'element que defineix la funció en un punt ve donat pels coeficients del seu desenrotllament de *Taylor*, vàlid en un cercle, però que s'estén al camp propi de la funció per mitjà de la perllongació analítica. El de *Riemann*, que parteix de les relacions que s'han de verificar per a la part real i el coeficient de l'imaginari de la funció monògena, en particular la de satisfer l'equació de *Laplace*, i es descobreixen les propietats de la funció composta per mitjà de les propietats de les components.

Per a l'anàlisi de les funcions de dues variables complexes, es pot provar l'aplicació del mateix proce-

diment i, en primer examen, tractar d'investigar quines poden ésser les proposicions que, pel cas particular de reduir-se a una sola variable independent, es converteixen en les ja conegudes.

Però per poc endavant que es vagi per aquest camí, s'adverteix que el trànsit no és obvi, i que la multiplicitat de variables independents introdueix modalitats del més gran interès, que no poden considerar-se com a generalització banal del cas més senzill.

Una funció $f(x, y)$ de dues variables complexes s'anomenarà *holomorfa* al voltant del punt $P(x_0, y_0)$ quan existeixi un bicilindre de centre P tal, que en tot punt intern seu la f sigui uniforme, contínua i holomorfa com a funció de x i de y separadament. Si en tots els punts interiors a una quadricel·la val la mateixa propietat, es dirà que la funció és, en ella, holomorfa. Com en el cas d'una variable, i segons l'observació de *Goursat*, n'hi ha prou per a l'holomorfisme en un punt que la funció $f(x, y)$ sigui uniforme i contínua amb derivades primeres f'_x, f'_y independents de les direccions dx i dy en llur propi pla. Pot prescindir-se, encara, de la continuïtat, mentre la f sigui acotada en un entorn de cada punt interior del camp: la continuïtat es dedueix de les altres condicions.

Tota funció holomorfa és desenrotllable en sèrie doble de *Taylor* i representable, per això, per un element de *Weierstrass*. *Cauchy* demostrà que, si en el pla d'una variable complexa es donen sobre un arc de corba regular dues funcions u i v , reals i analítiques considerades com a funcions de l'arc, es pot determinar una i única funció de variable complexa, holomorfa en una àrea o bicel·la que comprèn l'arc esmentat en el seu interior i que, sobre el dit arc, es redueix a $u + iv$. Un teorema anàleg fou enunciat l'any 1905 per *Levi-Civita*: donat

en S_4 un tros de superfície σ regular, i definides en ell dues funcions u i v , analítiques i reals del punt de la superfície, existeix una i única funció de (x, y) holomorfa en una quadricel·la que conté σ en l'interior, funció que es redueix a $u + iv$ en el tros donat de σ ; a menys que σ sigui característica, perquè aleshores u i v estan relacionades entre elles i no poden donar-se arbitràriament. Però un cop determinades, si és possible, dues funcions que compleixin en σ amb la condició necessària, hi ha infinites solucions.

Es dedueix d'aquest teorema que, si una funció holomorfa és nul·la en un tros de superfície *no característica* σ , és idènticament nul·la; i, encara, n'hi ha prou amb què s'anul·li en un conjunt de punts de σ que tingui determinades propietats; i, en fi, si una funció holomorfa en $P(x_0, y_0)$ és nul·la per a tots els valors $(x_0 + a, y_0 + b)$ essent a i b nombres reals prou petits, és idènticament nul·la.

Si la funció holomorfa és nul·la sobre una línia regular, dins del seu camp d'holomorfia, no és, en general, idènticament nul·la.

Donar u sobre la varietat de tres dimensions que limita una quadricel·la equival a proposar el problema de *Dirichlet*, del qual ens ocuparem en el n.º 5.

2. CONDICIÓN DE MONOGENEÏTAT I INTEGRAL EN CONTORN TANCAT

Si $x + iy = z$, $f(z) = u + iv$, les funcions u i v satisfan $\Delta u = 0$, $\Delta v = 0$. En el cas de dues variables $x = x_1 + ix_2$, $y = y_1 + iy_2$, separades la part real u de la imaginària v , han de satisfer el sistema següent, que tradueix en el camp real la condició de monogeneïtat:

$$\begin{array}{ll} \frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{\partial v}{\partial x_2} & \frac{\partial u}{\partial x_2} = -\frac{\partial v}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u}{\partial y_1} = \frac{\partial v}{\partial y_2} & \frac{\partial u}{\partial y_2} = -\frac{\partial v}{\partial y_1} \end{array}$$

de les quals es treu, si existeixen les derivades segones i són contínues,

$$E_1 \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0; \quad E_2 \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_2^2} = 0;$$

$$G_1 \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial y_1} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial y_2} = 0; \quad G_2 \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial y_2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial y_1} = 0$$

i anàlogament per a la v . Tota funció que satisfaci aquest sistema s'anomena *biharmònica* (*Poincaré*). És evident que una funció biharmònica és harmònica, perquè si $E_1 = 0$ $E_2 = 0$, també $E_1 + E_2 = 0$.

Donada una funció biharmònica u , es defineix l'associada per la integral següent, on P_0 és un punt fix i P un punt variable

$$v(P) = \int_{P_0}^P \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} dx_2 - \frac{\partial u}{\partial x_2} dx_1 + \frac{\partial u}{\partial y_1} dy_2 - \frac{\partial u}{\partial y_2} dy_1 \right)$$

La integral és independent del camí P_0P i depèn solament dels punts P_0 i P , ja que, segons les condicions de monogeneïtat, la diferencial anterior és exacta.

Devem a *Poincaré* (1886) l'extensió del teorema clàssic de *Cauchy* sobre la integral en un contorn tancat, que obtingué com a conseqüència de certs estudis de Geometria algebàrica. Sigui S una superfície analítica regular en S_4 , és a dir, una superfície els punts de la qual es

puguin fer correspondre biunívocament i analítica a dos paràmetres λ i μ , que individualitzen el punt d'un cercle; $x = x(\lambda, \mu)$, $y = y(\lambda, \mu)$ són funcions analítiques de λ i μ que representen una cel·la bidimensional de S_1 constituïda per cel·les bidimensionals del tipus precedent; i S sigui reductible a un punt o a una línia per deformació contínua dintre d'un camp Γ d'holomorfia de $f(x, y)$: llavors

$$\int_S \int f(x, y) dx dy = 0.$$

El mateix *Cauchy* donà l'any 1821, una fórmula integral que dóna el valor de la funció holomorfa en un punt (x', y') interior a un bicilindre Γ i contínua en el contorn del mateix cos, en funció dels valors de la mateixa funció en els punts (x, y) situats en el tor circular σ del contorn de Γ

$$f(x', y') = -\frac{I}{4\pi^2} \int_{\sigma} \int \frac{f(x, y)}{(x - x')(y - y')} dx dy$$

L'extensió del teorema de *Cauchy* a les integrals dobles fou analitzada l'any 1887 per *Volterra* en introduir les funcionals isògenes i des d'un punt de mira molt general. El mateix *Volterra*, l'any 1888, donava el teorema invers corresponent al de *Morera* (1886) per a les funcions d'una variable; d'aquest teorema es posseeix una senzilla demostració deguda a *Severi* (1931). L'enunciat és com segueix: Si $f(x, y)$ és contínua en una quadricel·la Γ i si la integral doble $\iint f(x, y) dx dy$ estesa a un cicle bilateral qualsevol S interior a Γ (necessàriament reductible a un punt per deformació contínua dintre de Γ) és nul·la, la $f(x, y)$ és holomorfa en Γ .

El concepte de residu de *Cauchy* ha estat aplicat per *Poincaré* a les funcions de dues variables complexes. El residu és diferent de zero en el cas d'una variable independent quan en l'interior d'una corba tancada, sobre la qual es pren la integral, existeix un punt singular. La integral no té sentit si el punt singular està en la mateixa corba. En el cas de dues variables no existeixen punts singulars isolats (*Hurwitz*, 1896) i es pot atribuir sentit a la integral sobre la superfície *S* mentre el punt singular figuri en ella isolat, per més que, naturalment, no es trobi isolat d'altres punts singulars que no estaran ja en la superfície *S* i formaran, per exemple, una varietat d'una, dues dimensions, etc.

3. PUNTS SINGULARS.

Els punts singulars d'una funció analítica uniforme $f(x,y)$ són essencials o inessencials. En aquest darrer cas, la funció és el quocient de dues funcions holomorfes, i els punts poden ésser pols o punts d'indeterminació;

en els pols $\frac{1}{f(x,y)}$ és holomorfa i té un zero d'ordre n ; en

els d'indeterminació $\frac{1}{f(x,y)}$ presenta una singularitat del mateix tipus.

Un pol de $f(x,y)$ es troba sempre en una superfície característica, lloc de pols (i un zero en una superfície característica, lloc de zeros). Un punt d'indeterminació o és damunt d'una superfície característica lloc de punts d'indeterminació o damunt d'una superfície característica lloc de pols, i les dues coses poden succeir a la vegada. Quan el punt d'indeterminació és damunt d'una superfície polar, passen per ell totes les superfícies caracterís-

tiques $f = \text{const.}$ i, en general, és isolat en la superfície polar. Les funcions racionals presenten ja exemples de punts d'indeterminació desconeguts per a les funcions d'una variable.

Una funció analítica, uniforme en un camp donat, totes les singularitats de la qual siguin inessencials, s'anomena *meromorfa*.

De la fórmula integral de *Cauchy* es deriva la demostració que donà *Hurwitz* del teorema citat abans: *El conjunt dels punts singulars d'una funció analítica uniforme de dues variables complexes és perfecte en el sentit de Cantor*. Aquesta observació restà isolada durant deu anys, fins que *Hartogs* deduí l'any 1906 el famós teorema: *Tota funció $f(x,y)$ holomorfa en els punts del contorn d'un camp finit de quatre dimensions pot perllongar-se com a funció holomorfa en tots els punts de l'interior*. És a dir, l'holomorfia en l'estrat contorn involucra l'holomorfia interior, fora dels punts de discontinuïtat artificial, ço és, aquells en què es pot eliminar la discontinuïtat canviant els valors de la funció.

Han estat donades algunes demostracions d'aquest teorema, per exemple, per *Poincaré* i *B. Segre*. *Severi* el demostra per al cas d'una variable complexa $y = y_1 + iy_2$ i una de real x_1 , i d'ací es dedueix el cas general.

La demostració de *Severi* suposa que $f(x_1, y)$ és holomorfa en la superfície S contorn d'un camp de tres dimensions. Consideri's ara el conjunt I de tots els punts singulars que hi hagi a dintre. No pot haver-hi un punt d'acumulació d' I sobre la superfície, perquè, si hi fos, seria singular. Per tant, considerant un punt O d'intersecció de S amb l'eix x_1 , existeix un pla perpendicular a x_1 i a una distància ε de O , tal que tots els eventuais punts singulars de f són, respecte a aquest pla, a la banda oposada a O . En els plans paral·lels $x_1 = \text{const.}$, cal-

culi's la integral

$$\varphi(x_1, y) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(x_1, t)}{t - y} dt$$

on l representa el contorn de la secció plana on varia la t , essent y un punt interior, fix en la integració. Aquesta funció és, evidentment, holomorfa a l'interior del camp contornejat per S i coincideix amb $f(x, y)$ en els punts del camp situats a la mateixa banda que O respecte al pla citat; la $f(x_1, y)$, doncs, coincideix amb $\varphi(x_1, y)$ en tot el camp i no hi pot tenir cap singularitat.

E. E. Levi ha pogut estendre el teorema de *Hartogs* a les funcions meromorfes, demostrant que si una funció es meromorfa en tots els punts d'un contorn quadridimensional (ço és, en l'estrat que materialitza el contorn) la funció pot perllongar-se a tot l'interior del camp al llarg d'una línia voltada d'un tub de quatre dimensions, dintre del qual la funció és sempre meromorfa (perllongació meromorfa).

El mateix matemàtic demostrà el caràcter perfecte del conjunt dels punts singulars essencials (1911), ço és, que no pot existir un punt singular essencial que sigui d'acumulació per a punts inessencials. També se li deu una altra propietat sobre el conjunt dels punts singulars, i és que el conjunt dels punts singulars no pot contenir una part perfecta separada dels altres punts singulars i tota ella a distància finita.

Liouville enuncia el teorema clàssic d'ésser necessàriament igual a una constant tota funció holomorfa en tot el pla, ço és, a distància finita o infinita. Aquest teorema fou completat per *Meray*, segons el qual tota funció meromorfa en tot el pla és necessàriament racional. Teoremes anàlegs valen per al cas de dues va-

riables: el comportament a l'infinit es tradueix al finit mitjançant una homografia. A aquests teoremes, demostrat el segon per *Hurwitz* en 1883, ha afegit *Severi* en 1929 el següent, que té com a cas particular el de *Liouville* : *Una funció analítica uniforme que sobre un pla característic qualsevol o sobre una superfície característica algèbrica no tingui sinó punts d'holomorfia és necessàriament constant.* Els punts d'holomorfia es refereixen ensems a ambdues variables. Aquest teorema confirma el caràcter superficial del conjunt dels punts singulars d'una funció analítica de dues variables. Com a cas particular, resulta que una funció analítica de dues variables, si és holomorfa a l'infinit, és necessàriament constant, cosa que no succeeix amb les funcions d'una variable. Igualment (*Severi, id.*) *si una funció analítica uniforme en un pla característic qualsevol o superfície característica algèbrica no té més que punts singulars inessencials és, per força, racional.* Tota funció meromorfa a l'infinit és racional. El teorema d'*Hurwitz* és un cas particular d'aquest.

El conjunt dels punts singulars d'una funció analítica uniforme de dues variables complexes el camp d'existència de la qual s'estengui indefinidament no pot ésser finit. Ni tampoc el dels punts singulars essencials.

4. TRANSFORMACIONS PSEUDO-CONFORMES.

Són les definides per funcions analítiques invertibles:

$$x' = x'(x, y) \quad y' = y'(x, y)$$

i inversament:

$$x = x(x', y') \quad y = y(x', y')$$

Aquestes transformacions (així anomenades per *Severi*) no conserven els angles sinó en les orientacions característiques, i converteixen una superfície característica en una altra. Una transformació pseudo-conforme canvia un hiperplà de S_4 en una hipersuperfície anomenada hiperplanoide (*Almer*, 1912). Perquè $u = 0$ sigui un hiperplanoide o contingui ∞^1 superfícies característiques que depenguin analíticament d'un paràmetre real, és necessari i suficient, segons *E. E. Levi*, que u satisfaci $L(u) = 0$ essent

$$\begin{aligned} L(u) \equiv & \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y_2} \right)^2 \right] E_1 + \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} \right)^2 \right] E_2 \\ & - 2 \left[\frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial u}{\partial y_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{\partial u}{\partial y_2} \right] G_1 \\ & - 2 \left[\frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial u}{\partial y_2} - \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{\partial u}{\partial y_1} \right] G_2 \end{aligned}$$

$L(u)$ és un invariant diferencial per a les transformacions pseudo-conformes; aplicant a $L(u)$ una transformació d'aquest tipus, es converteix en $L'(u) \equiv L(u) \cdot J$, essent J el jacobià de la transformació. J és sempre positiu, per tant, el signe de $L(u)$, suposat diferent de zero, és invariant per a tota varietat analítica $u = 0$. Si $L(u) = 0$ en P , el punt s'anomena *planar*: si $L(u) \neq 0$ en P , un entorn al voltant de P , vg. hiperesfèric, suficientment petit $x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 - r^2 \leq 0$ serà dividit per la varietat $u = 0$ en dues parts; en una d'elles, u i $L(u)$ tindran el mateix signe, i en l'altra tindran signe contrari, i s'anomenen respectivament regions negativa i positiva, les quals conserven aquest caràcter com a invariant en les transformacions pseudo-conformes.

Com hem indicat en la primera conferència, *Behnke* anomena pseudo-convexa la part negativa, per la circumstància que solament s'hi troben superfícies característiques tangents a la varietat en un punt no planar P , sense que, al voltant de P , tinguin cap altre punt en comú amb la varietat. *E. E. Levi* ha demostrat que la varietat $u = 0$ pot ésser contorn del camp d'existència d'una funció analítica $f(x, y)$ solament si, al voltant de tot punt no planar, la regió positiva pertany al camp. El teorema és invertible en petit. Si $u = 0$ és convexa, el teorema invers val també en gran. Si, finalment, $u = 0$ és un hiperplanoide (ço és, té tots els punts planars), un tros del mateix cos pot ésser contorn del camp d'existència de dues funcions analítiques diferents que existeixen, l'una a l'una banda i l'altra a l'altra banda d'aquell tros.

Les transformacions pseudo-conformes foren estudiades per *Poincaré* el 1907, i després, per altres investigadors, especialment en allò que fa referència als grups de transformacions dels camps circulars en ells mateixos i a l'equivalència entre ells de determinats recintes de tres dimensions, com a generalització del problema estès de la representació conforme ordinària. En el pla, segons el teorema de *Riemann-Carathéodory*, totes les bicel·les són equivalents respecte a les transformacions conformes, però en S_4 no passa el mateix per a les quadricel·les i les transformacions pseudo-conformes. El teorema de *Hartogs* permet de referir l'equivalència de les quadricel·les a la dels contorns.

Solament el grup de les substitucions lineals i enteres transforma en ell mateix un camp circular i en deixa fix el centre (*Behnke*). Els *Cartan* (pare i fill) han classificat els cossos circulars segons els grups de transformacions pseudo-conformes. *Thullen* ha demostrat que,

fora de certs tipus com l'hiperesfera, el bicilindre i un altre tipus perfectament estudiat, tota transformació pseudo-conforme d'un cos circular en si mateix conserva necessàriament fix el centre.

Els treballs de *Carathéodory* es refereixen a l'equivalència general de les quadricel·les, per a la qual ha trobat condicions necessàries; i *Bergmann* demostra que en cada sistema de quadricel·les equivalents existeix una forma típica, determinada per mitjà de certes condicions de mínim. En el cas de les funcions d'una sola variable, la cèl·lula típica és el cercle, i la condició de mínim es refereix a la integral.

$$\iint f \bar{f} dz d\bar{z}$$

essent z la variable complexa i f la funció que transforma la cèl·lula donada en un cercle: $\bar{z}$ i $\bar{f}$ representen els valors conjugats de z i f .

La solució del problema de l'equivalència local de les varietats de tres dimensions (problema de *Poincaré*) havia estat notablement apropada per *B. Segre*. La solució completa pertany a *E. Cartan*.

5. PROBLEMA DE DIRICHLET.

En el pla real, donada la funció u en un contorn tancat, és factible de calcular-la en tot punt de l'interior amb la sola hipòtesi d'ésser harmònica. La funció en el contorn, ço és, la dada, ha de satisfer determinades condicions qualitatives molt àmplies. Si les compleix, la solució existeix i és única. En el cas d'una quadricel·la Γ , en el contorn Δ de tres dimensions de la qual es dona una funció real, unívoca i contínua u , la deter-

minació de la funció U biharmònica en tot punt interior de Γ , la traça de la qual sobre Δ sigui u , pot ésser impossible. La funció harmònica definida pels valors donats en Δ no és, en general, biharmònica (*Poincaré*, 1883). Aquest matemàtic assegurava que en la diversa manera de presentar-se el problema de *Dirichlet* hi ha la diferència essencial que hom observa entre els problemes d'una i dues variables complexes.

Per a trobar les condicions que ha de satisfer u , observi's que U , que és harmònica, ha de satisfer en tot Γ les condicions de biharmonicitat, les quals deriven de les de monogenitat i equivalen a dir que

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} dx_2 - \frac{\partial u}{\partial x_2} dx_1 + \frac{\partial u}{\partial y_1} dy_2 - \frac{\partial u}{\partial y_2} dy_1$$

és una diferencial exacta. Introduint coordenades $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$ tals que θ_1, θ_2 i θ_3 determinin el raig que va d'un punt interior a un punt del contorn Δ i $\theta_4 = 0$ sigui un punt del contorn en aquell raig, i suposant que el contorn Δ és tal que el sistema de raigs i punts del contorn constitueixen una correspondència biunívoca sense excepcions, la condició d'ésser la forma anterior una diferencial exacta s'expressarà en les coordenades $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ i θ_4 mitjançant una altra forma en les diferencials d'aquestes variables, que en Δ es converteix en una de tres, per ésser allí $\theta_4 = 0$. Per a això són necessàries tres condicions ($F_1 = 0, F_2 = 0, F_3 = 0$) que han d'ésser satisfetes pels coeficients de $d\theta_1, d\theta_2$ i $d\theta_3$. En aquestes condicions intervenen $U, \frac{\partial U}{\partial \theta_1}, \frac{\partial U}{\partial \theta_2}, \frac{\partial U}{\partial \theta_3}, \frac{\partial U}{\partial \theta_4}$ en les quals cal fer $\theta_4 = 0$, amb la qual cosa les quatre primeres es converteixen, sobre Δ , en $u, \frac{\partial u}{\partial \theta_1}, \frac{\partial u}{\partial \theta_2}$ i $\frac{\partial u}{\partial \theta_3}$.

La darrera $\left(\frac{\partial U}{\partial \theta_4}\right)_{\theta_4=0}$ es treu de l'expressió d' U en forma integral (anàloga a un potencial), expressió que és conseqüència d'ésser U harmònica en Γ i reduir-se a u sobre el contorn Δ . En la integral, referida a Δ , intervenen u i una funció que depèn solament de Δ (com en el cas del potencial). Les tres condicions que així s'obtenen són íntegro-diferencials.

Pot demostrar-se que són equivalents a dues equacions diferencials lineals $K_1 = 0$, $K_2 = 0$, obtingudes de la manera següent. Les tres equacions que formulen intrínsecament en Δ que la forma diferencial esmentada és exacta contenen, com s'ha dit, u , $u_1 = \frac{\partial u}{\partial \theta_1}$, $u_2 = \frac{\partial u}{\partial \theta_2}$, $u_3 = \frac{\partial u}{\partial \theta_3}$, $u_4 = \frac{\partial u}{\partial \theta_4}$, i són lineals, homogènies i de primer ordre en u . Si u fos donat en la superfície, u_1 , u_2 i u_3 són conegudes, i les tres equacions diferencials haurien d'ésser satisfetes per la funció u i les seves derivades respecte a θ_1 , θ_2 i θ_3 . Perquè això sigui possible cal que siguin compatibles, és a dir, que els valors de $\frac{\partial u_4}{\partial \theta_1}$, $\frac{\partial u_4}{\partial \theta_2}$ i $\frac{\partial u_4}{\partial \theta_3}$ siguin efectivament les derivades parcials d'una mateixa funció u_4 . Això comporta tres condicions, que, donada la forma implícita en què seran contingudes u i les seves derivades en les tres condicions $F_1 = F_2 = F_3 = 0$, s'expressen ordinàriament pels parèntesis rectes de *Poisson*

$$[F_1, F_2] = 0 \quad [F_2, F_3] = 0 \quad [F_3, F_1] = 0$$

Les tres condicions $F_1 = F_2 = F_3 = 0$ i els tres parèntesis anteriors donen lloc en Δ ($\theta_4 = 0$) a sis condicions lineals, a les quals satisfan u_4 i les seves tres

derivades respecte a θ_1, θ_2 i θ_3 . Eliminant-les, es troben les dues equacions de Severi $K_1 = 0, K_2 = 0$, lineals i de tercer ordre, a les quals satisfà u en Δ , ço és, en una varietat Δ de tres dimensions, tancada. El problema, admès el que hem dit, queda reduït a provar l'existència en general de semblants solucions, problema difícil, ja que no es tracta d'una solució local, sinó d'una solució vasta que compregui tot Δ . La solució per al bicilindre fou assenyalada per Nikliborc el 1925 i redescoberta per Severi el 1930; Bergmann donà la solució per a certs contorns singulars, anàlegs al bicilindre (1931).

El teorema general d'existència i unicitat expressa l'equivalència del sistema diferencial lineal, de quatre dimensions, en les derivades parcials del segon ordre $E_1 = E_2 = G_1 = G_2 = 0$ i el sistema de dues equacions de tercer ordre. Aquesta reducció és deguda exclusivament a Severi.

La necessitat i la suficiència de les dues condicions de Severi $K_1 = K_2 = 0$, resulta d'una anàlisi que s'anomena *trànsit del real al complex*. Aquest mètode permet una interpretació i una demostració immediates del teorema de Cauchy, que afirma que si u i v són holomorfs en un arc l de corba del pla $x_1 x_2$ (x_1 i x_2 reals) i l'arc de corba és analític regular (x_2 desenrotllable en sèrie de potències de x_1 a l'entorn d'un punt P), existeix una funció $F(x)$ de la variable complexa $x = x_1 + ix_2$ que es redueix a $u + iv$ en l'arc de corba donat. Severi observa que aquesta funció es pot construir fàcilment sense necessitat d'acudir a teoremes d'existència en equacions diferencials, car n'hi ha prou amb considerar la S_4 de x_1 i x_2 complexes, en el pla real de les quals es troba l'arc de corba. En aquest S_4 es fa el canvi de variable definit per $x = x_1 + ix_2, \bar{x} = x_1 - ix_2$; en la imatge de l'arc donat i en la seva perllongació, $\bar{x}$ serà

funció analítica de x . Portat aquest valor de $\bar{x}$ en $u\left(\frac{x+\bar{x}}{2}\right) + iv\left(\frac{x+\bar{x}}{2}\right)$, la convertirà en una funció de x , holomorfa, que sobre l'arc l té el valor $u(x_1) + iv(x_1)$ prefixat.

En portar aquestes consideracions al cas de Γ i el seu contorn de tres dimensions Δ , hi ha una petita complicació que es tradueix així: En Δ les coordenades es suposaran funcions holomorfes de tres paràmetres locals, i els punts simples. Sigui P un d'aquests. En S_4 les coordenades són, vg., x_1, x_2, y_1, y_2 essent reals les quatre. Però aquest espai, perllongat al complex, es pot considerar en l'espai real S_8 , on s'admeten valors complexos a x_1, x_2, y_1, y_2 . En aquest S_8 , Δ s'haurà perllongat segons una varietat Δ' de sis dimensions reals i respondrà a una equació en coordenades complexes

$$\theta(x_1, x_2, y_1, y_2) = 0$$

Si s'efectua en S_8 l'homografia

$$x = x_1 + ix_2, \bar{x} = x_1 - ix_2, y = y_1 + iy_2, \bar{y} = y_1 - iy_2$$

la θ anterior es convertirà en $\Theta(x, y, \bar{x}, \bar{y})$, en què, per ésser P un punt simple, al voltant de la seva imatge en Δ' no serà zero $\frac{\partial \Theta}{\partial \bar{y}}$ i es podrà isolar $\bar{y}$ com a sèrie de potències de $x, \bar{x}, y$. D'altra banda, sigui $u + iv$ la funció donada sobre els punts (x_1, x_2, y_1, y_2) de la Δ original. Amb l'homografia indicada es converteix en funció de $x, \bar{x}, y, \bar{y}$, i, sobre la Δ' , en funció holomorfa de $x, \bar{x}, y$. No resulta, doncs, funció holomorfa de (x, y) com ho era de x en el cas anterior, llevat que la seva derivada respecte a $\bar{x}$ sigui zero en Δ' . És a dir, al voltant

de P , anomenat $F(x, y, \bar{x})$ el resultat de substituir, en la funció donada $u + iv$ en Δ , en lloc de x_1, x_2, y_1, y_2 llurs valors en funció de $x, \bar{x}, y, \bar{y}$, i de portar-hi el valor de $\bar{y}$ tret de l'equació de Δ' , ha de realitzar-se

$$\frac{\delta F}{\delta \bar{x}} = 0$$

condició que no es troba en el cas de *Cauchy* referit abans i que, precisament, és la condició de biharmonicitat. Però com que el primer membre de la condició anterior és desenrotllable en sèrie de potències al voltant de P , per a la seva anul·lació n'hi ha prou que sigui nul·la a l'entorn real de P , és a dir, sobre l'entorn de P en Δ . Separant en la condició anterior la part real de la imaginària, resten dues equacions lineals del primer ordre en u i v , que expressen la condició que u i v siguin seccions de dues funcions biharmòniques associades a l'entorn de Δ . Aquestes condicions són de la forma

$$\Lambda_1 v = \Lambda_2 u \quad \Lambda_2 v = -\Lambda_1 u$$

essent Λ_1 i Λ_2 operadors lineals i homogenis. La condició d'integrabilitat de les darreres condueix a les $K_1 = K_2 = 0$, que resulten així necessàries i suficients perquè u pugui ésser secció d'una funció biharmònica en un entorn de P . Per a cada P es determina així una funció i les diverses funcions són perllongació una de l'altra al llarg de Δ , definint una U biharmònica en un entorn de Δ . Es construeix l'associada V i, pel teorema de *Hartogs*, la funció $U + iV$ és perllongable holomorfa en tot Γ . Si Δ és un hiperplanoide, no val l'anàlisi anterior, però s'arriba fàcilment a demostrar que, perquè u , donada en un tros d'hiperplanoide, sigui

secció d'una funció biharmònica U , holomorfa en un entorn d'aquell tros, basta que u sigui harmònica sobre les superfícies característiques que el constitueixen.

Donat que la u ha de satisfer en Δ determinades condicions, sorgeix la pregunta de quins elements arbitraris caldrà donar en u . La solució per al cas d'ésser Δ un hiperplanoide fou trobada per *Severi*: una funció biharmònica holomorfa ve determinada en un dels dos camps en què un hiperplanoide divideix l'espai, quan es dóna el seu valor al llarg d'una línia regular que talli en un punt cadascuna de les superfícies característiques de l'hiperplanoide.

En aquest ordre d'idees, *Severi* ha demostrat, en general, que si en Δ es dóna una línia regular, oberta o tancada, que satisfaci certes condicions de *genericitat* que, per abreujar, no especifiquem, U resta determinada *unívocament* coneixent el valor de u i les seves dues primeres derivades. Aquest és un teorema d'unicitat; però resta oberta la qüestió de saber si val el corresponent teorema d'existència.

BIBLIOGRAFIA

Per a una referència bibliogràfica vegeu la memòria de l'autor «Risultati, vedute e problemi nella teoria delle funzioni analitiche di due variabili complesse», als *Rendiconti dei Seminari Matematici di Milano e di Roma* (1931-32), i altres treballs posteriors publicats a les *Memorie della R. Accademia d'Italia* i als *Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei*.

Als mateixos *Rendiconti* del Seminari de Roma es troba, a continuació de la memòria esmentada, una altra memòria de B. Segre, intitulada «Questioni geometriche legate colla teoria delle funzioni di due variabili complesse», molt abundosa en notes bibliogràfiques.

A la col·lecció *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete*, editada a Berlín, ha sortit darrerament una publicació de Behnke i Thullen, «Theorie der analytischen Funktionen mehrerer Komplexen Veränderlichen», amb una extensa bibliografia fins a començaments del 1934.

INSTITUT
D'ESTUDIS
CATALANS



PALAU DE LA
GENERALITAT
BARCELONA

Publicacions de
L'INSTITUT D'ESTUDIS CATALANS

Representants : a FRANÇA : A. Picard, 82, Rue Bonaparte, Paris (VI); a ALEMANYA : Otto Harrassowitz, Leipzig; a ANGLATERRA : Dulau & Co., 37, Soho Square, Londres.

Miscel·lània Prat de la Riba, recull d'escrits en homenatge al fundador de l'Institut d'Estudis Catalans.
Vol. I. — PERE COROMINES : La sobirania de les persones polítiques. — J. PUIG I CADAVALCH : El problema de la transformació de la catedral del Nord importada a Catalunya. Contribució a l'estudi de l'arquitectura gòtica meridional. — EDUARD FONTSERÈ : Distribució altimètrica de les humitats mitjanes des del port de Barcelona a la muntanya. — AUGUST PI SUÑER : Els reflexos tròfics glucemians. — LLUÍS NICOLAU D'OLWER : Píndar-Teocrit. Manuscrit de la Biblioteca de Catalunya. — PERE BARNILS : Comentaris fonètics : Idees i realitats. — LLONGÍ NAVÀS, S. J. : Varietat nova d'Ascalaf (Neuròpter), dedicat a En Prat de la Riba. — JOAQUIM RUYRA : L'educació de la inventiva. — A. GRIERA : Català «Poll». — A. RUBIÓ I LLUCH : La Companyia Catalana sota el comandament de Teobald de Cepoy. Campanyes de Macedònia i Tersàlia (1307-1310). — LOUIS GAUCHAT : Leben und Sprache. — MIQUEL COSTA I LLOBERA, Pvre. : Himne de l'Epifania. — RAMON D'ALÒS-MONER : De la marmessoria d'Arnau de Vilanova. — FERRAN DE SAGARRA : Assassinat de D. Antoni de Fluvià, i homicidis, robatoris i saqueig del castell i terme de Palautordera (episodi de l'any 1640). — J. MASSÓ TORRENTS : La cançó provençal en la literatura catalana..... 20 Ptes.

Vol. II (*En preparació*).

SECCIÓ DE CIÈNCIES

	Ptes.		Ptes.
Treballs del Servel Tècnic del Paludisme (1915-1916)..... (<i>Exhaurits</i> .)		Any III, fasc. I, II i III....	Cada un 4
		» IV, fasc. I a IX.....	» 2
		» V, fasc. I a VI.....	» 2
Treballs de la Societat de Biologia , publicats sota la direcció d'A. PI I SUÑER. Vols I a XIII. (Anys 1913, 1914, 1915, 1916, 1917 1918, 1919, 1920-21, 1922, 1923-24, 1925-27, 1928-29, i 1930-31.).....	Cada un 20	» VI, fasc. I, II-V i VI-IX.	» 3
		» VII, fasc. únic.....	» 4
		» VIII, fasc. únic.....	» 4
		» IX... (<i>En preparació</i> .)	
		» X, fasc. únic.....	» 4
Vol. XIV..... (<i>En premsa</i> .)		» XI, fasc. únic.....	» 4
		» XII, fasc. primer.....	» 4
Arxius.		Monografia mundial de l'ordre dels Rafidòp- ters (Ins) , pel P. LLONGÍ NAVÀS, S. J....	(<i>Exhaurida</i> .)
Any I, fasc. I (<i>exh.</i>), II i III..	Cada un 4		
» II, fasc. I, II i III.....	» 4		

	Ptes.
Col·lecció de cursos de Física i Matemàtica, dirigida per E. TERRADAS.	
Vol. I. — E. TERRADAS, Els elements discrets de la matèria i la radiació.....	3
Vol. II. — J. REY PASTOR, Teoria de la representació conforme.....	3
Vol. III. — J. HADAMARD, Poincaré i la teoria de les equacions diferencials....	3
Vol. IV. — J. PALACIOS, Propietats dels gasos ultraenraris.....	3
Vol. V. — LEVI CIVITA, Qüestions de Mecànica clàssica i relativista.....	3
Vol. VI. — F. SEVERI, Sobre funcions de dues variables complexes.....	5
Biblioteca Filosòfica, dirigida per PERE COROMINES.	
Vol. I. — <i>Vives a Anglaterra</i> , per FORSTER WATSON.....	10
Vol. II. — <i>La Natura i la Història</i> , per P. DORADO MONTERO.....	6
Anuari de la Societat Catalana de Filosofia. Any I (1923).....	20
FLORA I FAUNA DE CATALUNYA dirigides per JOSEP M. ^a BOFILL I PICHOT	
Flora de Catalunya, per J. CADEVALL.	
Vol. I.....	25
• II.....	25
• III.....	30
• IV, a despeses de la Institució Patxot	35
Malacologia, per M. CHIA.	
Fasc. I i II..... Cada un	5
• III.....	1
Entomologia.	
Dípters. Fasc. I, per J. ARIAS ENCOBET.	5
Coleòpters. G. <i>Carabus</i> . Fasc. I, per A. CODINA.....	7
Hemípters, per A. CODINA.....	7
Neuròpters. Fasc. I. <i>Monografia general de Catalunya</i> , pel P. LONGÍ NAVÁS, S. J.	7
Fasc. II. <i>Mecòpters</i> , pel mateix autor..	3
Treballs de la Institució Catalana d'Història Natural.	
Vol. I a VI. (Anys 1915, 1916, 1917, 1918, 1919-20 i 1921-22)..... Cada un	15

	Ptes.
SERVEI METEOROLÒGIC DE CATALUNYA	
Notes d'estudi, dirigides per E. FONTSERÈ, Fasc. I a LVI..... Cada un	2
Vols. I (1921-23). 1. JOAQUIM FEBRER : Pluges a Catalunya durant l'estiu de 1921. — 2. RAMON JARDÍ : Un pluviògraf d'intensitat. — 3. MANUEL ALVAREZ CASTRILLON : Freqüència de les direccions del vent a Barcelona. — 4. JOAQUIM FEBRER : Pluges a Catalunya durant la tardor de 1921. — 5. RAFAEL PATXOT I JUBERT : Contribució a l'estudi dels corrents atmosfèrics mitgers. — 6. GABRIEL CAMPO : Relació entre els halos i les pluges ciclòniques a Catalunya. — 7. JOSEP ESTALELLA : Les denominacions del vent a la costa de Llevant. — 8. JOAQUIM FEBRER : Pluges a Catalunya durant l'hivern de 1921-22. — 9. JOAQUIM FEBRER : Pluges a Catalunya durant l'any meteorològic de 1920-21. — 10. MANUEL ALVAREZ CASTRILLON : Recurrència de l'estat higromètric a l'Observatori Fabra. — 11. JOAQUIM FEBRER : Pluges a Catalunya durant la primavera de 1922. — 12. ANTONI QUIXAL : Sondatges de l'atmosfera lliure a Barcelona, amb globus pilots, des del 19 de setembre de 1921 al 30 de setembre de 1922. — 13. MAURICI HERNÁNDEZ : Les temperatures màximes i mínimes a Mahó. — 14. EDUARD FONTSERÈ : Sondatges de l'atmosfera lliure, amb globus pilots, durant els anys 1916, 1917 i 1918. — 15. JOAQUIM FEBRER : Pluges a Catalunya durant l'estiu de 1922. — 16. JOAQUIM FEBRER : Pluges a Catalunya durant la tardor de 1922 i l'any meteorològic 1921-22. — 17. MANUEL ALVAREZ CASTRILLON : Temperatures normals a l'Observatori Fabra, deduïdes de vuit anys d'observacions (1914-21). — 18. JOSEP ANGLADA : Instruccions per a la recepció dels radiogrames meteorològics del matí. — 19. EDUARD FONTSERÈ : Sondatges de l'atmosfera lliure a Barcelona, amb globus pilots, durant els anys 1919 a 1920. — 20. RAMON JARDÍ : Deu anys d'observacions termoplüviomètriques a Tivisa. — 21. GABRIEL CAMPO : Sobre el període de seca de l'hivern de 1922-23 a Catalunya. — 22. ANTONI QUIXAL : Sondatges de l'atmosfera lliure a Barcelona, amb globus pilots, des del 1. ^r d'octubre al 31 de desembre de 1922. — 23. JOAQUIM FEBRER : Pluges a Catalunya durant l'hivern de 1922-23.	

Vol. II (1923-1927). 24. JOAQUIM FEBRER: Pluges a Catalunya durant la primavera de 1923. — 25. ANTONI QUIXAL: Sondatges de l'atmosfera lliure a Barcelona, amb globus pilots, des del 1.^r de gener al 30 de juny de 1923. — 26. RAFAEL PATXOT I JUBERT: Segon estudi horari de la pluja a Sant Feliu de Guíxols. Observacions del març de 1896 al juny de 1923. — 27. JOAQUIM FEBRER: Observacions pluviomètriques de la Xarxa Catalana, corresponents als anys 1911, 1912, 1913, 1918, 1919 i 1920. — 28. JOSEP ANGLADA: Sondatges de l'atmosfera lliure a Barcelona amb globus pilots, des del 1.^r de juliol al 31 de desembre de 1923. — 29. JOAQUIM FEBRER: Pluges a Catalunya durant l'estiu i la tardor de 1923 i l'any meteorològic 1922-23. — 30. JOAQUIM FEBRER: Pluges a Catalunya durant l'hivern de 1923-24 i la primavera de 1924. — 31. JOSEP ANGLADA: Sondatges de l'atmosfera lliure a Barcelona, amb globus pilots, des del 1.^r de gener al 30 de juny de 1924. — 32. JOAQUÍM FEBRER: Lluviats en Catalunya durante el verano y el otoño de 1924 y el año meteorológico 1923-1924. — 33. GABRIEL CAMPO: Sondeos de la atmósfera libre en Barcelona, con globos pilotos, desde el 1.^o de julio de 1924 al 31 de diciembre de 1925. — 34. JOAQUÍM FEBRER: Lluviats en Catalunya durante el año meteorológico comprendido entre el 1.^o de diciembre de 1924 y el 30 de noviembre de 1925. — 35. JOAQUÍM FEBRER: Lluviats en Catalunya durante el año meteorológico comprendido entre el 1.^o de diciembre de 1925 y el 30 de noviembre de 1926. — 36. GABRIEL CAMPO: Sondeos de la atmósfera libre en Barcelona, con globos pilotos, durante el año 1926.

Vol. III (1928-1931). 37. JOAQUÍM FEBRER: Lluviats en Catalunya durante el año meteorológico comprendido entre el 1.^o de diciembre de 1926 y el 30 de noviembre de 1927. — 38. GABRIEL CAMPO: Sondeos de la atmósfera libre en Barcelona con globos pilotos, durante el año 1927. — 39. MANUEL ALVAREZ CASTRILLÓN: Algunos climogramas de la zona costera catalana. — 40. JOAQUÍM FEBRER: Lluviats en Catalunya durante el año meteorológico comprendido entre el 1.^o de diciembre de 1927 y el 30 de noviembre de 1928. — 41. EDUARDO FONTSERÉ: Los «Llevant» de la costa catalana. — 42. GABRIEL CAMPO: Sondeos de

la atmósfera libre en Barcelona con globos pilotos, durante el año 1928. — 43. JOAQUIM FEBRER: Pluges a Catalunya durant l'any comprès entre el 1.^r de desembre de 1928 i el 30 de novembre de 1929. — 44. GABRIEL CAMPO: Sondatges de l'atmosfera lliure a Barcelona amb globus pilots, durant l'any 1929. — 45. JOAQUIM FEBRER: Assaig sobre el clima de Caldes de Montbui. — 46. GABRIEL CAMPO: Sondatges de l'atmosfera lliure a Barcelona amb globus pilots durant l'any 1930. — 47. JOSEP VIA RAVENTÓS: Assaig sobre el clima de l'Aldea en el terme de Tortosa. — 48. JOAQUIM FEBRER: Pluges a Catalunya durant l'any meteorològic comprès entre el 1.^r de desembre de 1929 i el 30 de novembre de 1930.

Vol. IV (en curs de publicació). 49. EDUARDO FONTSERÉ: Condiciones climatológicas de les costes occidentals de la Mediterrània i en particular de les terres costeres catalanes. — 50. FRANCESC PARDILLO: Les pluges de pols del 30 d'octubre de 1926 i del 27 de novembre de 1930 a Catalunya. I. Estudi minerològic. — 51. EDUARDO FONTSERÉ: Freqüència de les glaçades a Catalunya. — 52. GABRIEL CAMPO: Sondatges de l'atmosfera lliure a Barcelona amb globus pilots durant l'any 1931. — 53. JOAQUIM FEBRER: Pluges a Catalunya durant l'any meteorològic comprès entre el 1.^r de desembre de 1930 i el 30 de novembre de 1931. — 54. GABRIEL CAMPO: Resum de disset anys de sondatges a Barcelona amb globus pilots (1914 a 1930). — 55. JOSEP ANGLADA: Assaig d'una nova forma d'historial termomètric, de possible aplicació als problemes sanitaris (anys 1922-23). — 56. ARNAU GABELLIERI: Pluges a Catalunya durant l'any meteorològic comprès entre el 1.^r de desembre de 1931 i el 30 de novembre de 1932

Treballs de l'Estació Aerològica de Barcelona, per E. FONTSERÉ.

Vol. I, 1914..... 4
 « II..... (Exhaurit.)

MEMÒRIES PUBLICADES A DESPESES
 DE LA INSTITUCIÓ PATXOT

Vol. I:

Fasc. I. — M. ALVAREZ CASTRILLON, Microsistemes observats a Barcelona durant els anys 1915 i 1916..... 4

	Ptes.		Ptes.
Fasc. II. — R. JARDÍ, <i>Estudis de la intensitat de la pluja a Barcelona</i>	3	Fasc. III. — C. PI-SUÑER BAYO, <i>El complex vitamínic B</i>	4
SOCIETAT CATALANA DE CIÈNCIES FÍSQUES, QUÍMIQUES I MATEMÀTIQUES		Fasc. IV. — DAVID GARCIA, <i>Assaigs moderns per a la fonamentació de les matemàtiques</i>	4
Memòries, Vol. I (1932-33):		Fasc. V. — EDUARD FONTSERÈ, <i>Les estacions meteorològiques de muntanya fundades per la Generalitat amb motiu de l'Any Polar 1932-1933</i>	4
Fasc. I. — M. MASRIERA I RUBIO, <i>Concordància de la termodinàmica i la cinètica en la isòcora de reacció</i>	4	Fasc. VI. — M. FAURA I SANS, <i>Expedició científica per la Fenoscàndia (Suècia, Noruega, Finlàndia i Rússia) i regions circumpolar nòrdiques, realitzada durant l'estiu del 1931</i> ..	6
Fasc. II. — J. BALTÀ ELIAS, <i>Les radiopertorbacions naturals (atmosfèriques) en meteorologia</i>	4		

SECCIÓ HISTÒRICO-ARQUEOLÒGICA

	Ptes.		Ptes.
Anuaris de l'Institut d'Estudis Catalans.		Les Obres d'Auziàs March. Edició crítica en dos volums, en vista de tots els manuscrits i totes les edicions, per AMADEU PAGÈS..	24
Anuaris MCMVII-MCMXXX. Vols. I a VI (VI <i>exhaurit</i>).....	60	Edició de 40 exemplars en paper de fil.	50
Vol. VII (MCMXXI-MCMXXVI).....	50	Repertori de l'antiga literatura catalana , per JAUME MASSÓ TORRENTS.	
• VIII. MCMXXVII-MCMXXXI. (En premsa.)		<i>La Poesia</i> . Vol. I (publicat a despeses del Sr. Francesc Cambó).....	45
Les Pintures murals catalanes.		Diplomatari de l'Orient Català , per A. RUBIÓ I LLUCH..... (En premsa.)	
Fasc. I-IV..... (Exhaurits.)		L'Arquitectura romana a Catalunya , per J. PUIG I CADAFALCH. Reedició ampliada del vol. I de l' <i>Arquitectura romànica a Catalunya</i> , de J. Puig i Cadafalch, A. de Falguera i J. Goday, part primera.	
• V. — Sant Sadurní d'Ossormort, Sant Martí Ses-Corts i El Brull. (En premsa.)		(En premsa.)	
Les monedes catalanes , per JOAQUIM BOTET i SISÓ.		ESTUDIS DE BIBLIOGRAFIA LUL-LIANA	
Vol. I-III..... (Exhaurits.)		I. — <i>L'Edició maguntina de Ramon Llull</i> , pel Dr. A. GOTTRON.....	5
L'Arquitectura romànica a Catalunya , per JOSEP PUIG I CADAFALCH, A. DE FALGUERA i J. GODAY.		II. — <i>Bibliografia de les impressions lul·lianes</i> , per ELIES ROGENT i ESTANISLAU DURAN.	25
Vol. I. — Precedents : L'Arquitectura romana; l'Arquitectura cristiana preromànica..... (Exhaurit.)		FUNDACIÓ CONCEPCIÓ RABELL CIBILS	
Vol. II. — Des del segle IX a les darreries del segle XI.....	50	VÍDUA ROMAGUERA	
Vol. III i darrer. — Els segles XII i XIII. (Exhaurit.)		Gesta comitum Barcinonensium. Textos llatí i català, per L. BARRAU-DIHIGO i J. MASSÓ I TORRENTS.....	25
Documents per la Història de la Cultura catalana mig-eva , publicats per A. RUBIÓ I LLUCH.		Dietari del Capellà d'Alfons el Magnànim , publicat i anotat per F. MARTORELL I TRABAL..... (En premsa.)	
Vol. I..... (Exhaurit.)			
• II i darrer.....	25		
Itinerari de Jaume I el Conqueridor , per JOAQUIM MIRET I SANS..... (Exhaurit.)			

	Ptes.
B. DESCLOT : <i>Crònica</i> . Editada i anotada en col·laboració amb FERRAN SOLDEVILA, per JORDI RUBIÓ.....	(En premsa.)
Libre dels Feyts de Jaume I , editat per MANUEL DE MONTOLIU, <i>P. Marsili liber actuum domini regis Jacobi</i> , editat per XAVIER DE SALAS i ENRIC BAGUÉ. Anotació de FERRAN SOLDEVILA.....	
	(En premsa.)

MEMÒRIES

Vol. I (Publicat a despeses de la Institució Patxot):	
Fasc. I. — PERE PUJOL, <i>L'urna d'argent de sant Ermengol, bisbe d'Urgell</i>	4
Fasc. II. — A. RUBIÓ i LLUCH, <i>Paquimeres i Muntaner</i>	2
Fasc. III. — J. MILLÀS i VALLICROSA, <i>Documents hebraics de jueus catalans</i>	15
Fasc. IV. — J. DE C. SERRA-RÀFOLS, <i>Forma Conventus Tarraconensis, I. Baetulo-Blanda</i>	8

Fasc. V. — <i>Leges Palatinae Jacobi II regis Maioricarum</i> , pel DR. WILLEMSSEN.	(En premsa.)
---	--------------

Vol. II (publicat a despeses de la Institució Patxot):	
R. D'ABADAL i VINYALS, <i>Els diplomes carolingis a Catalunya</i>	(En premsa.)
Vol. III (publicat a despeses de la Institució Patxot):	
J. PUIG i CADAVALCH, <i>La Geografia i els orígens del primer art romànic</i>	100
Vol. IV:	
A. RUBIÓ i LLUCH, <i>La població de la Grècia catalana en el segle XIV</i>	4
Vol. V:	
JOAN BERGÓS, <i>L'escultura a la Seu vella de Lleida</i>	(En premsa.)
Vol. VI:	
MANUEL TRENS, <i>Ferrer Bassa i les pintures de Pedralbes</i>	(En premsa.)

SECCIÓ FILOLÒGICA

	Ptes.
Himnes Homèrics . Traducció en vers de JOAN MARAGALL, i text grec amb la traducció literal de P. BOSCH GIMPERA. (<i>Exhaurit.</i>)	
El Gènesi , versió de l'hebreu segons els textos originals, i amb anotació, de Mn. FREDERIC CLASCAR.....	5
Edició en paper de fil.....	20
Museu : Hero i Leandre . Text grec amb la versió literal en prosa de L. SAGALÀ i en hexàmetres d'AMBROSI CARRION, duent en apèndix les traduccions inèdites, en vers, de P. BERTRAN i BROS i J. M. PELLICER i PAGÈS.....	(Exhaurit.)
Mireia . Poema provençal de FREDERIC MISTRAL. Traducció catalana de MARIA ANTÒNIA SALVÀ.....	(Exhaurit.)
Tercera edició.....	(En premsa.)
El Càntic dels Càntics . Versió de l'hebreu, per Mn. FREDERIC CLASCAR.....	3
Els IV llibres de les Geòrgiques , de Publi Virgili Maró, traducció en vers per Mn. LLORENÇ RIBER.....	6

	Ptes.
L'Èxode , versió de l'hebreu, per Mn. FREDERIC CLASCAR.....	8
Exposició de l'Ortografia Catalana , extret del Diccionari Ortogràfic de l'Institut d'Estudis Catalans.....	0'50
Butlletí de Dialectologia Catalana (publicació semestral des de 1913).	
Vol. I (abril-desembre 1913).....	3
• II (gener-juny 1914). (<i>Exhaurit.</i>)	
• II (juliol-desembre 1914).....	2
• III (gener-juny 1915).....	2'50
• III (juliol-desem. 1915). (<i>Exhaurit.</i>)	
• IV (gener-juny 1916). (<i>Exhaurit.</i>)	
• IV (juliol-desembre 1916).....	3
• V (gener-desembre 1917).....	4
• VI (gener-juny 1918).....	2'50
• VI (juliol-desembre 1918).....	2'50
• VII (gener-desembre 1919).....	5
• VIII (gener-desembre 1920).....	5
• IX (gener-desembre 1921).....	5
• X (gener-desembre 1922).....	10
• XI (gener-juny 1923).....	5
• XI (juliol-desembre 1923).....	5
• XII (gener-desembre 1924).....	10

BIBLIOTECA DE CATALUNYA

	Ptes.
Butlletí de la Biblioteca de Catalunya.	
Any I, 1914, n.º 1 (gener-abril).....	1'50
• n.º 2 (maig-agost).....	3
• n.º 3 (setembre-desembre).....	1'50
• II, 1915, n.º 4 (gener-agost).....	4
• n.º 5 (setembre-desembre).....	2
• III, 1916, n.º 6 (gener-desembre).....	5
• IV, 1917, n.º 7 (gener-desembre).....	10
• V, 1918-1919, n.º 8.....	20
• VI, 1920-1922, n.º 9.....	30
• VII, 1923-1927.....	30
• VIII..... (<i>En premsa.</i>)	

Butlletí d'adquisicions.

Any 1918.....	(<i>Exhaurit.</i>)	
Anys 1919 a 1922.....	Cada un	0'50

Catàleg de la Col·lecció Cervàntica Bonsoms, per JOAN GIVANEL I MAS.

Vol. I (1590-1800).....	20
Edició de 40 exemplars numerats en paper de fil.....	40
Vol. II (1801-1879).....	30
Edició de 40 exemplars numerats en paper de fil.....	50
Vol. III (1880-1915).....	40
Edició de 40 exemplars numerats en paper de fil.....	60

Publicacions del Departament de Música de la Biblioteca de Catalunya.

Vol. I. — Els Madrigals i la Missa de Difunts d'En Brudieu. Transcripció i notes històriques i crítiques per FELIP PEDRELL i Mn. HIGINI ANGLÈS, prev.	20
Vol. II. — Catàleg dels manuscrits musicals de la Col·lecció Pedrell, per mossèn HIGINI ANGLÈS..... (<i>Exhaurit.</i>)	
Vol. III. — Iohannis Pujol (1573-1626). In alma Cathedrali Barcinonensi cantus	

Magistri Opera Omnia nunc primum in lucem edita cura et studio HIGINI ANGLÈS, pbri. Vol. I : In festo Beati Georgii.....	20
Vol. IV. — Musici organici Iohannis Cabanilles (1644-1712). Opera Omnia nunc in lucem edita cura et studio HIGINI ANGLÈS, pbri. Vol. I.....	20
Vol. V. — El Canto Mozárabe. Estudio histórico-crítico de su antigüedad y estado actual, por CASIANO ROJO y GERMAN PRADO, monjes de Silos, O. S. B.....	15
Vol. VI. — El còdex polifònic de Las Huelgas (Burgos) dels segles XIII-XIV. Facsimil, transcripció i estudi per mossèn HIGINI ANGLÈS, 3 vols.....	300
Vol. VII. — Iohannis Pujol (1573-1626) Opera Omnia... cura et studio HIGINI ANGLÈS, vol. II.....	20
Vol. VIII. — Musici organici Iohannis Cabanilles (1644-1712). Opera Omnia nunc lucem edita cura et studio HIGINI ANGLÈS, pbri. Vol. II.....	20
Vol. IX. — Antoni Soler (1729-1783). Sis quintets per a instruments d'arc i orgue o clave obligat. Transcripció i revisió per ROBERT GERHARD. Introducció i estudi d'HIGINI ANGLÈS, prev...	30
Vol. X..... (<i>En preparació.</i>)	
Vol. XI. — Celos aun del aire matan. Opera del siglo XVII. Texto de Calderón y música de Juan Hidalgo, por JOSÉ SUBIRÁ.....	10

En dipòsit:

Catàleg de la Biblioteca musical de la Diputació de Barcelona, per FELIP PEDRELL (2 vols.).....	65
---	----

Barcelona, agost del 1934



